System- und Modelltheorie

Realistisches Räuber - Beute – Modell

Bearbeiter:	Daniel Boigner	9825060
	Karl Machaczek	9805068
	Sascha Nemecek	9825815
Proseminar:	System- und Modelltheorie	
Leiter:	Hr. Grossmann	
Abgabedatum:	15.01.1999	

Aufgabenstellung

Thema 4: Realistische Räuber-Beute-Modelle

A) Neben der Sättigung der Beutepopulation durch logistisches Wachstum betrachtet man auch noch häufig den Fall, dass auch der Einfluss der Jagd von der Grösse der Beutepopulation abhängig ist. Dies führt zu folgendem Modell:

$$X(t+\Delta t) = X(t) + \left[a \cdot X(t) \cdot \left(1 - \frac{X(t)}{k} \right) - b(X(t)) \cdot X(t) \cdot Y(t) \right] \cdot \Delta t$$
$$Y(t+\Delta t) = Y(t) + \left[c \cdot X(t) \cdot Y(t) - d \cdot Y(t) \right] \cdot \Delta t$$

Man untersuche das Verhalten des Systems für folgende Funktionen b(x):

$$Fall\ a) \qquad b(x) = \frac{A \cdot x}{(x+B)}$$

$$Fall\ b) \qquad b(x) = \frac{A \cdot x}{(x^2+B^2)}$$

$$Fall\ c) \qquad b(x) = \frac{A \cdot (1-e^{-x})}{x}$$

Man untersuche das Verhalten der drei Systeme für folgende Parameterwerte

Parameter: a = 1, b = 1, c = 1, d = 1, k = 2, A = 1, B = 1

Startwerte: X(0) = Y(0) = 0.1

Zeitintervall: [0, 20]

Zeitschritt: Δt = 0.002

Welche Unterschiede ergeben sich zum klassischen Räuber-Beute-Modell und zum Räuber-Beute-Modell mit saturiertem Wachstum.

B) Neben der Sättigung der Beutepopulation durch logistisches Wachstum betrachtet man häufig den Fall, dass auch die Räuberpopulation in einer der folgenden Arten modifiziert wird:

Modell 1)

$$X(t+\Delta t) = X(t) + \left[a \cdot X(t) \cdot \left(1 - \frac{X(t)}{k}\right) - b \cdot X(t) \cdot Y(t) \right] \cdot \Delta t$$

$$Y(t+\Delta t) = Y(t) + \left[c \cdot Y(t) - h \cdot Y(t) \cdot \frac{Y(t)}{X(t)} \right] \cdot \Delta t$$

$$a) \qquad b(x) = \frac{A \cdot x}{(x+B)}$$

$$b) \qquad b(x) = \frac{A \cdot x}{(x^2 + B^2)}$$

Man untersuche das Verhalten des Systems für folgenden Parameterwerte:
a = 1, b = 1, c = 1, h = 1, k = 2

Startwerte: X(0) = Y(0) = 0.1

Zeitintervall: [0, 20]

Zeitschritt: Δt = 0.002

Modell 2)

$$X(t+\Delta t) = X(t) + \left[a \cdot X(t) \cdot \left(1 - \frac{X(t)}{k}\right) - b \cdot X(t) \cdot Y(t) \right] \cdot \Delta t$$

$$Y(t+\Delta t) = Y(t) + \left[-c \cdot Y(t) + d \cdot Y(t) \cdot b(X(t)) \right] \cdot \Delta t$$

Man untersuche das Verhalten der beiden Systeme für folgenden Parameterwerte:
a = 1, b = 1, c = 1, d = 1, k = 2, A = 1, B = 1

Startwerte: X(0) = Y(0) = 0.1

Zeitintervall: [0, 20]

Zeitschritt: Δt = 0.002

Welche Unterschiede ergeben sich zum klassischen Räuber-Beute-Modell und zum Räuber-Beute-Modell mit saturiertem Wachstum.

Grundlagen

Klassisches Räuber-Beute-System (Lotka-Volterra)

$$X(t+\Delta t) = X(t) + [a \cdot X(t) - b \cdot X(t) \cdot Y(t)]\Delta t$$
$$Y(t+\Delta t) = Y(t) + [c \cdot X(t) \cdot Y(t) - d \cdot Y(t)]\Delta t$$

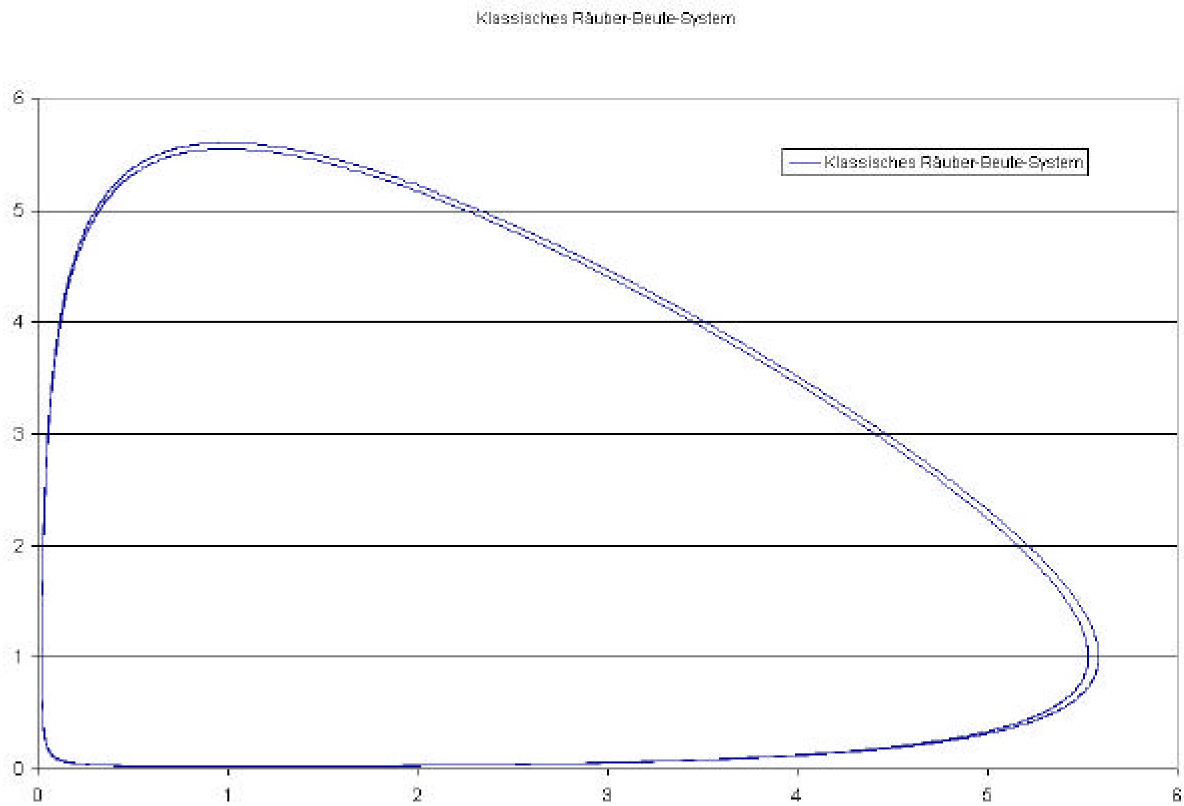
a= spezifische Wachstumsrate der Beute
b= spezifische Verlustrate der Beute
c= Beutegewinnrate der Räuber
d= Atmungsrate der Räuber

Stabile Punkte:

- $X = 0;\ Y = 0$
- $X = \frac{d}{c};\ Y = \frac{a}{b}$

Asymptotisches Verhalten:

- Für X = 0 sterben die Räuber exponentiell aus
- Für Y= 0 wächst die Beutepopulation exponentiell



Alle Trajektorien schwanken periodisch um den stabilen Punkt. Dauer und Amplitude der Periode hängen von den Startwerten ab. Im Zeitmittel sind die Räuberpopulation und die Beutepopulation konstant und entsprechen den Werten im stabilen Punkt. Durch die Ungenauigkeit der Berechnung ergibt sich die permanente Vergrösserung der Trajektorien.

Räuber-Beute-Modell mit saturiertem Wachstum

$$X(t+\Delta t)=X(t)+\left[a\cdot X(t)\cdot\overbrace{\left(1-\frac{\cdot X(t)}{k}\right)}^{\text{Kapazitätsgrenze}}-b\cdot X(t)\cdot Y(t)\right]\Delta t$$

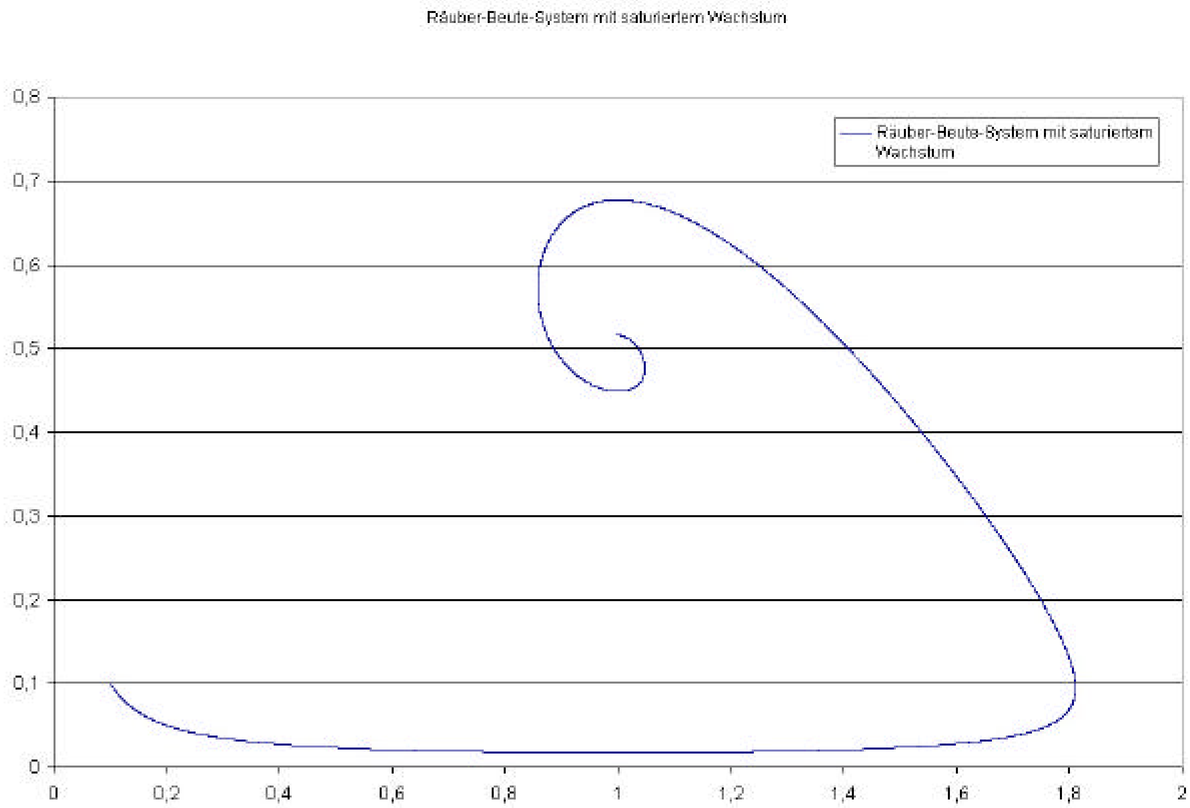
$$Y(t+\Delta t)=Y(t)+\left[c\cdot X(t)\cdot Y(t)-d\cdot Y(t)\right]\Delta t$$

k = Sättigungsgrenze für die Beute

Stabile Punkte:

- $X=0;\ Y=0$
- $X=k;\ Y=0$
- $X=\frac{d}{c};\ Y=\frac{a}{b}\cdot\left(1-\frac{d}{c\cdot k}\right)$

  Dieser Punkt ist ein asymptotisch stabiler Punkt für alle Startwerte, vorausgesetzt k ist derart, daß 1-d/kc >0. Ansonsten stirbt die Räuberpopulation aus.



Im Gegensatz zum ersten Kurvenverlauf handelt es sich hierbei nicht um eine geschlossene Trajektorie. Die Kurve nähert sich immer mehr den stabilen Punkten an.

Untersuchung der gegebenen Modelle

Im folgenden untersuchen wir die gegebenen realistischen Räuber- Beute- Modelle anhand der Berechnung der stationäre Punkte sowie einer graphischen Darstellung der Trajekorien. Zur besseren Übersicht ist je am Ende von Aufgabe A und B eine zusammenfassende Darstellung enthalten, die einen unmittelbaren Vergleich der erstellten Trajektorien ermöglichen soll.

Aufgabe A

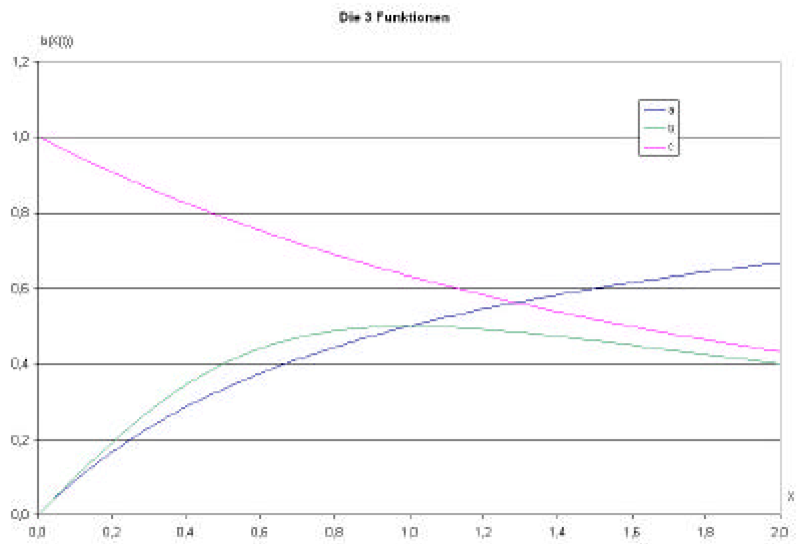
$$X(t+\Delta t) = X(t) + \left[a \cdot X(t) \cdot \left(1 - \frac{X(t)}{k} \right) - b(X(t)) \cdot X(t) \cdot Y(t) \right] \cdot \Delta t$$
$$Y(t+\Delta t) = Y(t) + \left[c \cdot X(t) \cdot Y(t) - d \cdot Y(t) \right] \cdot \Delta t$$

$$\textit{Fall } a) \qquad b(x) = \frac{A \cdot x}{(x+B)}$$

$$\textit{Fall } b) \qquad b(x) = \frac{A \cdot x}{(x^2+B^2)}$$

$$\textit{Fall } c) \qquad b(x) = \frac{A \cdot (1-e^{-x})}{x}$$

Bevor wir mit der Untersuchung der Auswirkungen der Funktionen auf das Räuber-Beute-System beginnen, betrachten wir die 3 Funktionen im einzelnen.



Da es sich hierbei um spezifische Verlustfunktionen der Beute handelt, können wir folgende Schlüsse aus diesem Diagramm ziehen:

Fall a.) Dieser Fall kann als der normale Fall betrachtet werden. Je mehr Beutetiere vorhanden sind, desto mehr werden gefressen.

Fall b.) Hier weißt die Funktion einen Wendepunkt auf. Dieser kann so interpretiert werden, dass die Beutepopulation ab diesem Wendepunkt die Möglichkeit besitzt sich selbst zu verteidigen. Als Beispiel können amerikanische Büffel genommen werden, die sich ab einer gewissen Herdengrösse im Kreis formieren und sich so verteidigen.

Fall c.) Kann als der zu Fall a.) inverse angenommen werden. Je mehr Beutetiere vorhanden sind, desto weniger werden von den Räubern gerissen. Dies kann als Frühwarnsystem verstanden werden, wie es zum Beispiel bei Murmeltier der Fall ist.

Fall a)

$$X(t+\Delta t)=X(t)+\left[a\cdot X(t)\cdot\left(1-\frac{X(t)}{k}\right)-\frac{A\cdot x}{(x+B)}\cdot X(t)\cdot Y(t)\right]\cdot\Delta t$$
$$Y(t+\Delta t)=Y(t)+\left[c\cdot X(t)\cdot Y(t)-d\cdot Y(t)\right]\cdot\Delta t$$

$\Rightarrow$ *Stationäre Punkte*

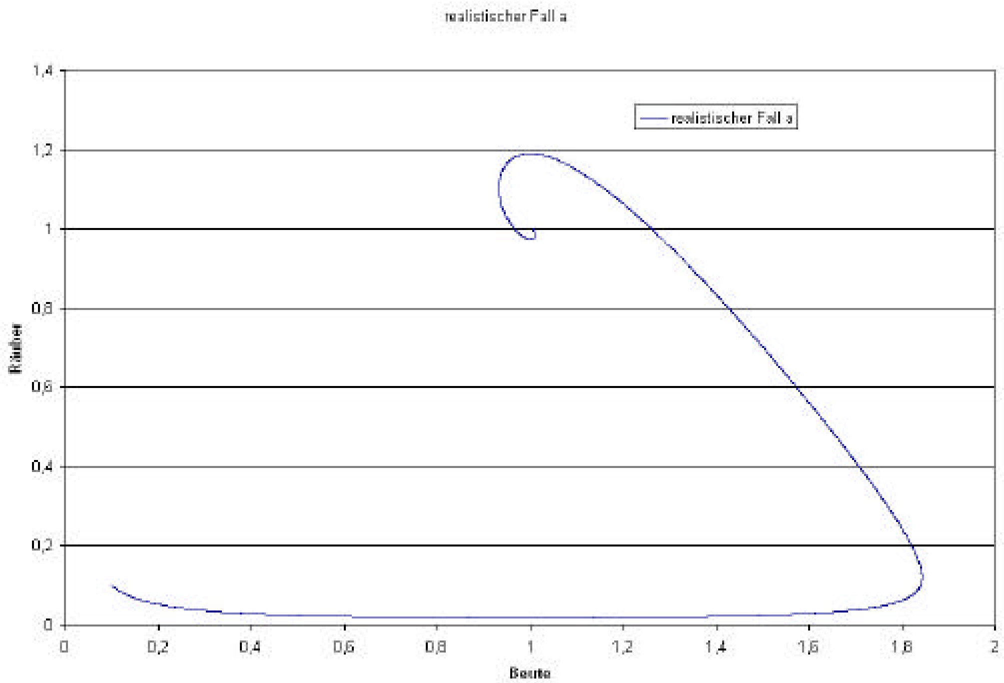
$1.Lsg.:\ x_1=0\quad y_1=0$

$2.Lsg.:\ x_2=k\quad y_2=0$

$$3.Lsg.:\ x=\frac{d}{c}\ \Rightarrow\ y=\frac{\left(\frac{d}{c}+B\right)\cdot\left(1-\frac{d}{k\cdot c}\right)a\cdot c}{A\cdot d}$$

$\textit{Für unsere Parameter}:\ x=1;\ y=1$

Diagramm:



Die Trajektorie zeigt eine relativ rasche Annäherung an den stationären Punkt.

Fall b)

$$X(t+\Delta t) = X(t) + \left[a \cdot X(t) \cdot \left(1 - \frac{X(t)}{k}\right) - \frac{A \cdot x}{(x^2 + B^2)} \cdot X(t) \cdot Y(t) \right] \cdot \Delta t$$

$$Y(t+\Delta t) = Y(t) + [c \cdot X(t) \cdot Y(t) - d \cdot Y(t)] \cdot \Delta t$$

$$c \cdot x \cdot y - d \cdot y = 0 \rightarrow \; y \cdot (c \cdot x - d) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \;\; oder \;\; x = \frac{d}{c}$$

$$a \cdot x \cdot \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{A \cdot x}{(x^2 + B^2)} \cdot x \cdot y = 0$$

$$a \cdot x \cdot \left(1 - \frac{x}{k}\right) = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\; oder \;\; x = k$$

$\Rightarrow$ *Stationären Punkte*

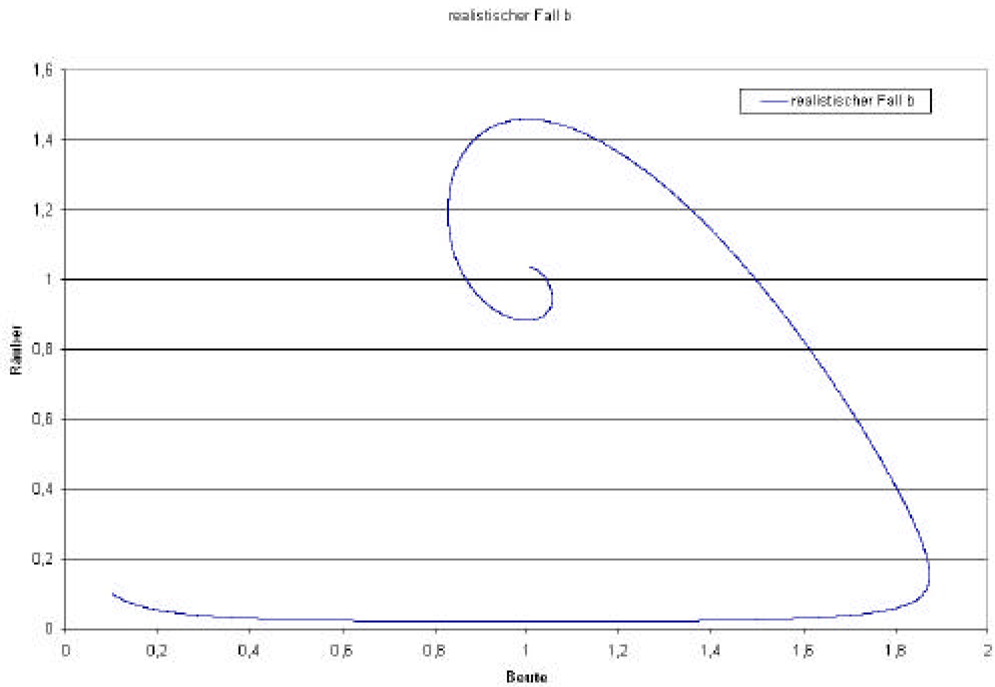
1.Lsg.: $x_1 = 0 \quad y_1 = 0$

2.Lsg.: $x_2 = k \quad y_2 = 0$

3.Lsg.: $x = \frac{d}{c} \;\Rightarrow\; y = \frac{\left(\frac{d^2}{c^2} + B^2\right) \cdot \left(1 - \frac{d}{k \cdot c}\right) \cdot a \cdot c}{A \cdot d}$

Werte für unsere Parameter: $x = 1;\; y = 1$

Diagramm:



Die Annäherung an den stationären Punkt erfolgt deutlich langsamer als bei Fall a.

Fall c)

$$X(t+\Delta t) = X(t) + \left[a \cdot X(t) \cdot \left(1 - \frac{X(t)}{k} \right) - A \cdot \left(1 - e^{-x}\right) \cdot Y(t) \right] \cdot \Delta t$$

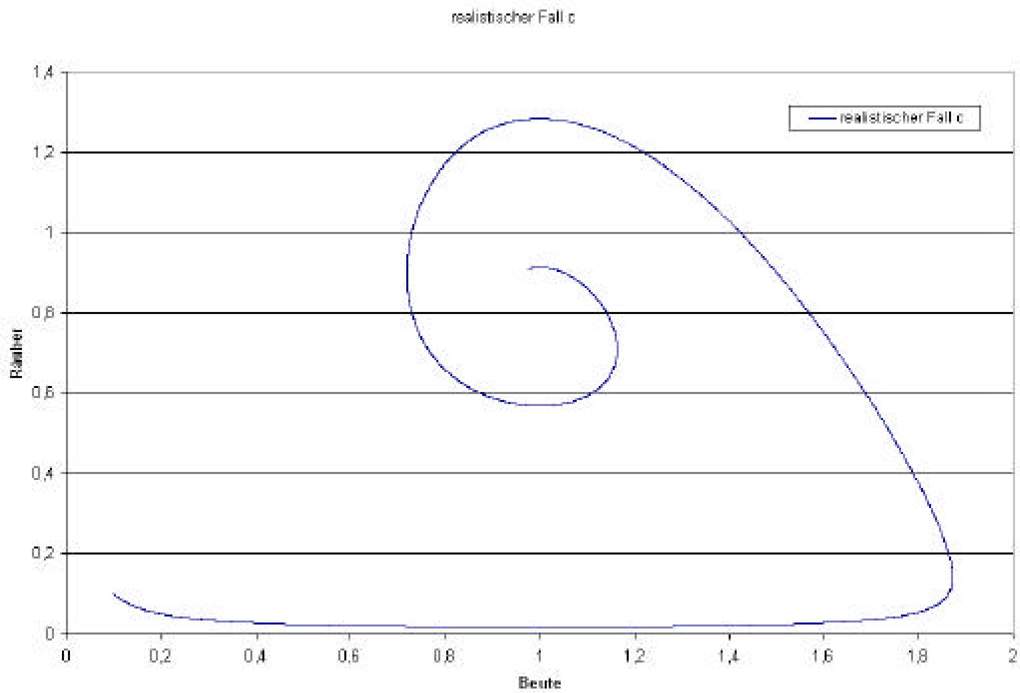
$$Y(t+\Delta t) = Y(t) + \left[c \cdot X(t) \cdot Y(t) - d \cdot Y(t) \right] \cdot \Delta t$$

Stationäre Punkte:

1) $y_1 = 0 \rightarrow x_1 = 0$
2) $y_2 = 0 \rightarrow x_2 = k$
3) $x_3 = \dfrac{d}{c} \rightarrow y_3 = \dfrac{ad(kc-d)}{Akc^2\left(1-e^{-\frac{d}{c}}\right)}$

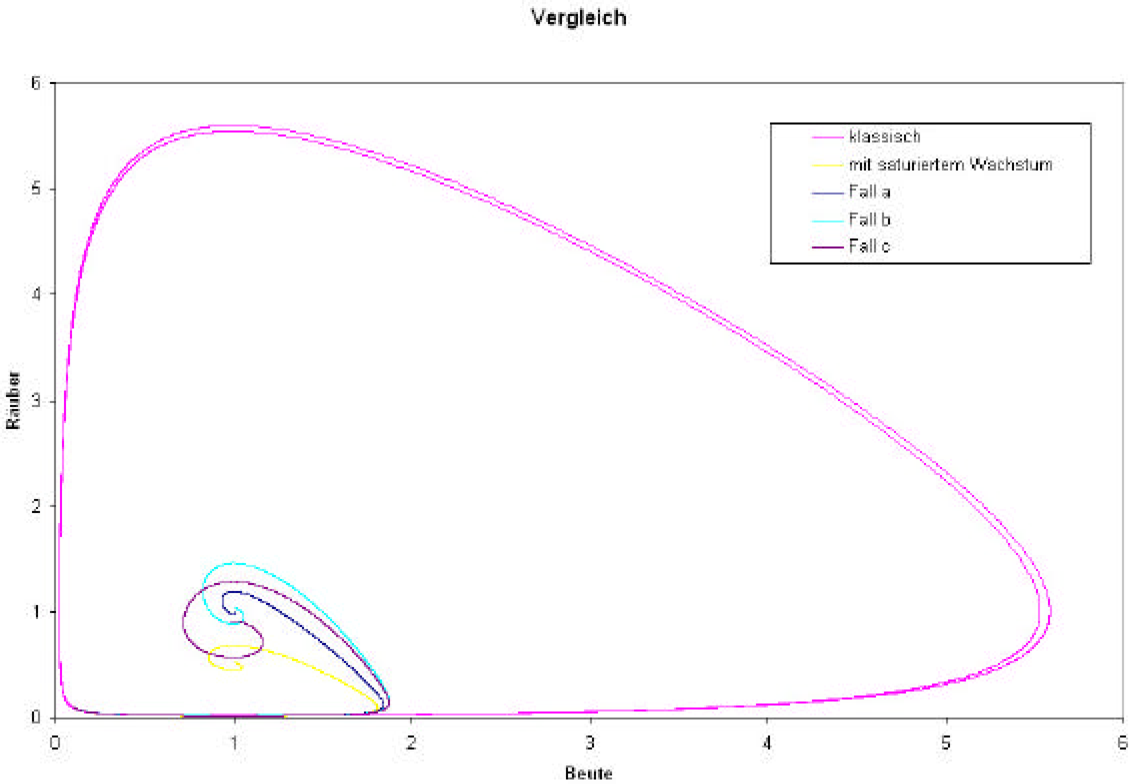
$Werte\ \ für\ unsere\ Parameter:\ x = 1;\ y \approx 0{,}79$

Diagramm:



Bei dieser Variante wird eine Funktion von b verwendet, die im Gegensatz zu den ersten beiden Fällen nicht vom Parameter B abhängig ist. Wie aus dem Diagramm ersichtlich, bewirkt diese Funktion b, daß sich die Trajektorie immer mehr dem stationären Punkt nähert, ähnlich den ersten beiden Varianten. Diese Annäherung erfolgt allerdings im Vergleich zu den Fällen a und b sichtbar langsamer.

Vergleich



Zusätzlich zu den Fällen a, b und c der Aufgabe A sind natürlich auch das klassische Räuber- Beute- Modell sowie das Räuber- Beute- Modell mit saturiertem Wachstum in diesem Diagramm gegenübergestellt.

Aufgabe B

Modell 1

In diesem Modell wird die Mortalitätsrate der Räuber durch eine von der Räuber- und Beutepopulation abhängige Mortalitätsfunktion ersetzt. Dies kann so verstanden werden, dass bei steigender Räuberpopulation diese aufgrund mehrerer Faktoren (Revier-, Macht- und Futterkämpfe) zu erhöhter Dezimierung der Population führen.

$$X(t+\Delta t) = X(t) + \left[a \cdot X(t) \cdot \left(1 - \frac{X(t)}{k} \right) - b \cdot X(t) \cdot Y(t) \right] \cdot \Delta t$$

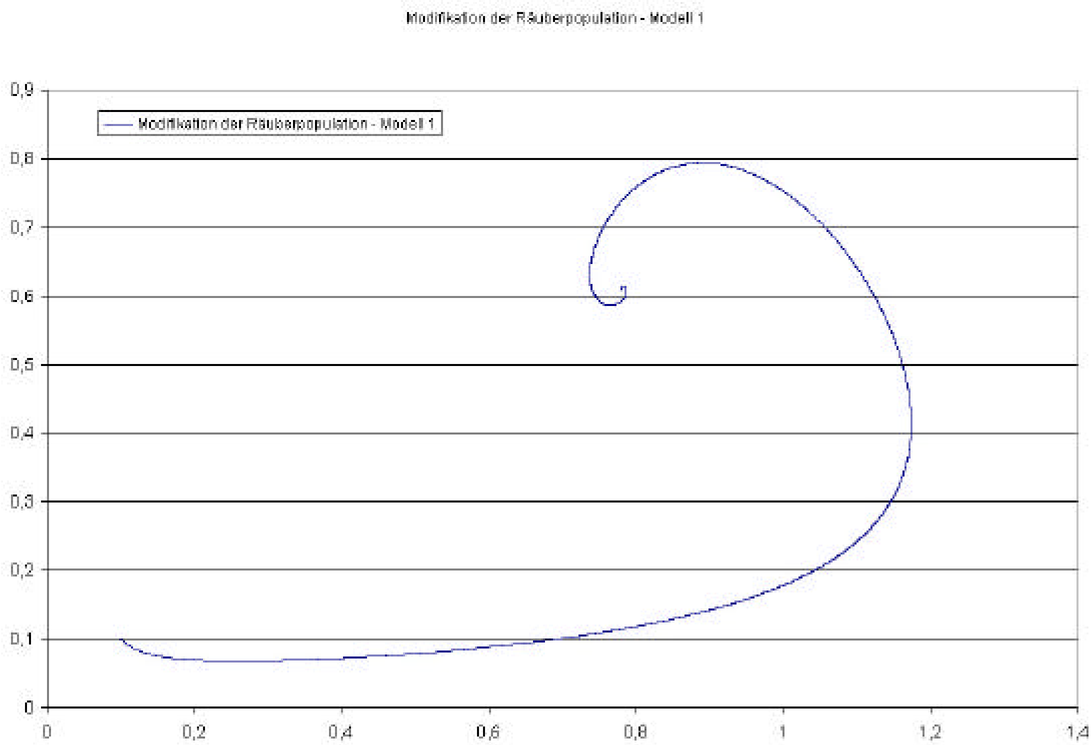
$$Y(t+\Delta t) = Y(t) + \left[c \cdot Y(t) - h \cdot Y(t) \cdot \frac{Y(t)}{X(t)} \right] \cdot \Delta t$$

Stationäre Punkte:

1) $y_1 = 0 \rightarrow x_1 = 0$
2) $y_2 = 0 \rightarrow x_2 = k$
3) $x_3 = \dfrac{a \cdot k \cdot h}{a \cdot h + b \cdot c \cdot k} \rightarrow y_3 = \dfrac{c \cdot a \cdot k}{a \cdot h + b \cdot c \cdot k}$

$\mathit{Werte\ \ für\ unsere\ Parameter:}\ x = 0{,}\dot{6};\ y = 0{,}\dot{6}$

Diagramm:



Dieses Modell enthält eine Modifizierung der Räuberpopulation. In dem Diagramm kann Mann/Frau erkennen, dass sich die Trajektorie relativ rasch den stationären Punkten nähert und somit einpendelt. Sie ähnelt dem Verhalten bei saturiertem Wachstum. Allerdings nimmt zu Beginn die Räuberpopulation geringfügiger ab und steigt wesentlich früher als beim saturiertem Wachstum wieder an.

Modell 2

Im zweiten Modell wird wieder die Entwicklung der Räuberpopulation modifiziert. Der Parameter c steht in diesem Fall für die Mortalitätsrate der Räuber. Der Parameter d gibt den möglichen Räuberzuwachs an, wobei der tatsächliche Populationszuwachs von der Funktion b(X(t)) eingeschränkt wird.
Als Beispiel können Ameisen herangezogen werden, da ein Großteil der Ameisen den Winter nicht überlebt.

Fall a

$$X(t+\Delta t) = X(t) + \left[a \cdot X(t) \cdot \left(1 - \frac{X(t)}{k} \right) - b \cdot X(t) \cdot Y(t) \right] \cdot \Delta t$$

$$Y(t+\Delta t) = Y(t) + \left[-c \cdot Y(t) + d \cdot Y(t) \cdot \underbrace{\frac{A \cdot X(t)}{B + X(t)}}_{b(X(t))} \right] \cdot \Delta t$$

Stationäre Punkte:

$$I:\ a \cdot x \left(1 - \frac{x}{k} \right) - b \cdot x \cdot y = 0$$

$$\underline{\underline{x_1 = 0 \rightarrow y_1 = 0}}$$

$$II: -c \cdot y - d \cdot y \cdot \frac{A \cdot x}{x + b} = 0$$

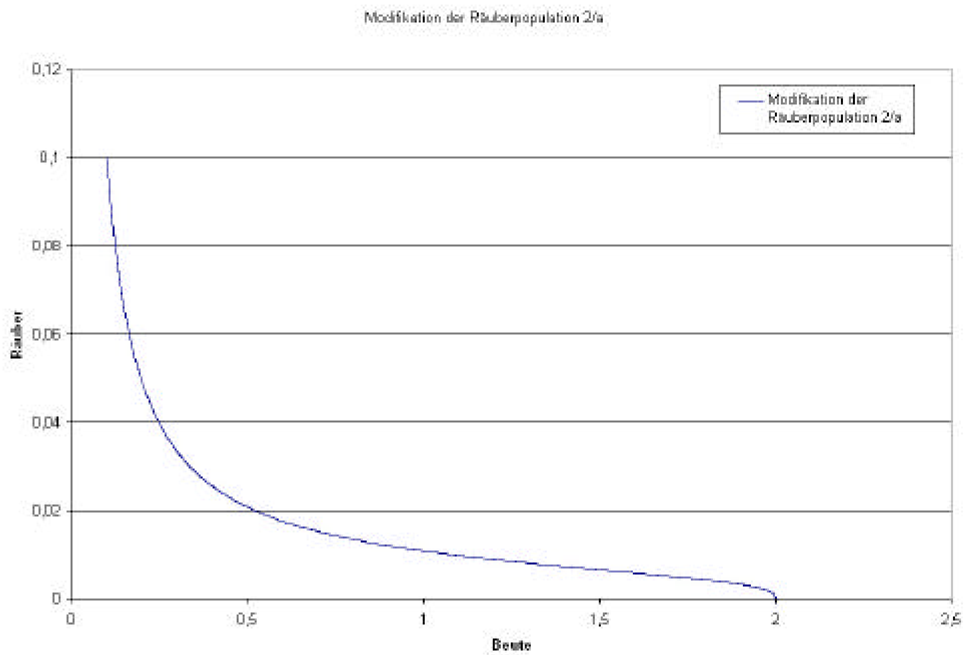
$$\underline{\underline{y_2 = 0 \rightarrow x_2 = k}}$$

$$d \cdot y \cdot A \cdot x = c \cdot y \cdot x + b \cdot c \cdot y$$

$$\underline{\underline{x_3 = \frac{b \cdot c}{d \cdot A - c} \rightarrow y_3 = \frac{a}{b} \cdot \left(1 - \frac{b \cdot c}{k \cdot (d \cdot A - c)} \right)}}$$

$$\textit{Werte für unsere Parameter}:\ x = k;\ y = 0$$

Diagramm:



Aufgrund der ausgewählten Parameter kommt es nicht zu einem Verlauf wie in den obigen Beispielen. Die Räuberpopulation stirbt aus, während sich die Beutepopulation der Sättigungsgrenze k nähert.

Fall b

$$X(t+\Delta t) = X(t) + \left[a \cdot X(t) \cdot \left(1 - \frac{X(t)}{k} \right) - b \cdot X(t) \cdot Y(t) \right] \cdot \Delta t$$

$$Y(t+\Delta t) = Y(t) + \left[-c \cdot Y(t) + d \cdot Y(t) \cdot \frac{A \cdot X(t)}{B^2 + X(t)^2} \right] \cdot \Delta t$$

Stationäre Punkte:

$$I:\ a \cdot x \left(1 - \frac{x}{k} \right) - b \cdot x \cdot y = 0$$

$$\underline{\underline{x_1 = 0 \rightarrow y_1 = 0}}$$

$$II: -c \cdot y - d \cdot y \cdot \frac{A \cdot x}{x^2 + b^2} = 0$$

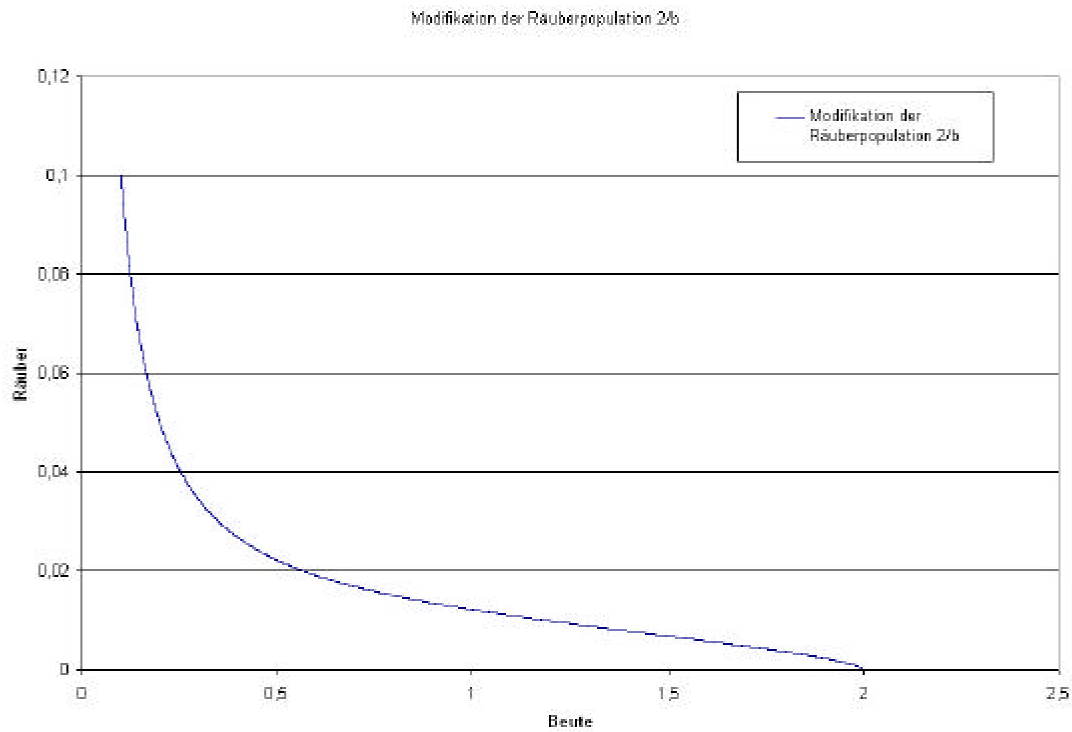
$$\underline{\underline{y_2 = 0 \rightarrow x_2 = k}}$$

$$d \cdot y \cdot A \cdot x = c \cdot y \cdot x + b \cdot c \cdot y$$

$$\underline{\underline{x_{34} = \frac{d \cdot A \pm \sqrt{d^2 \cdot A^2 - 4 \cdot B^2}}{2 \cdot c} \rightarrow y_{34} = \frac{a}{b} \cdot \left(1 - \frac{d \cdot A \pm \sqrt{d^2 \cdot A^2 - 4 \cdot B^2}}{2 \cdot k \cdot c} \right)}}$$

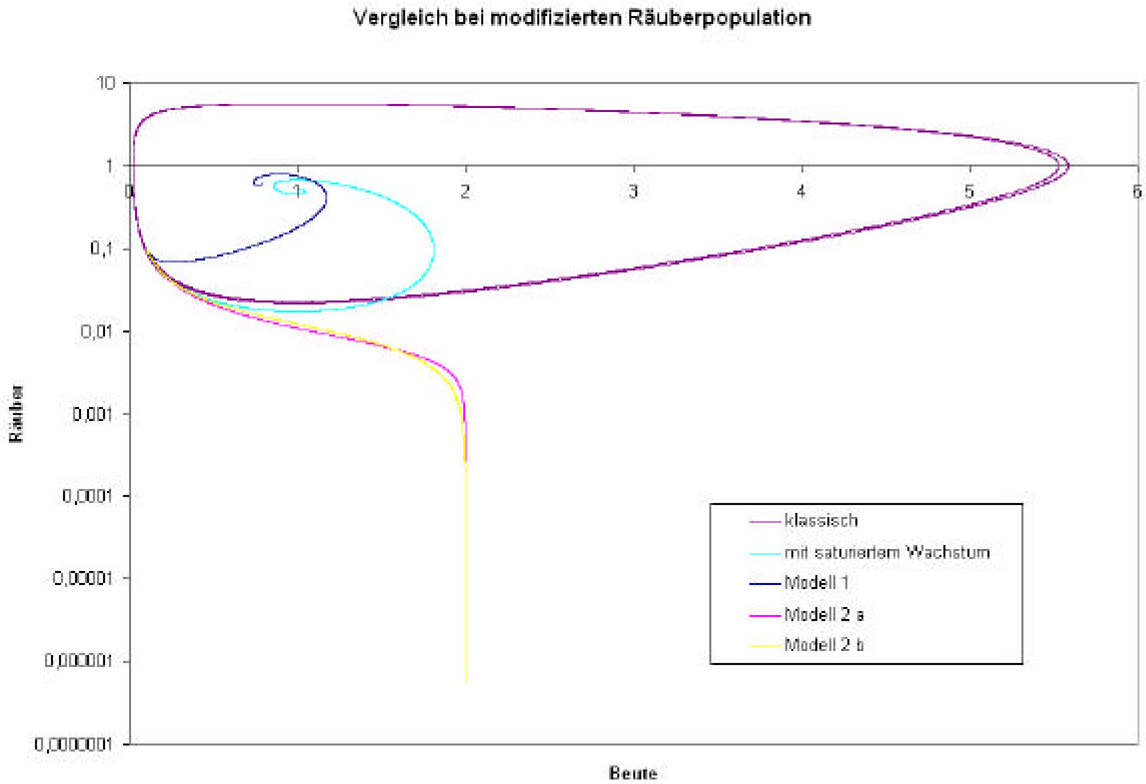
$$\textit{Werte für unsere Parameter}:\ x = k;\ y = 0$$

Diagramm:



Wie auch schon im Fall a stirbt die Räuberpopulation schon nach kurzer Zeit aus und die Beutepopulation strebt zur Sättigungsgrenze k.

Vergleich



Modell 1:
Durch die geringe Anfangspopulation der Räuber ergibt sich für diese niedrige Todesrat, die zu einer schnellen Vermehrung der Räuber führt. Dadurch ist die Entwicklung der Beutepopulation eingeschränkt. Daraus resultiert, dass das System schneller gegen den stabilen Punkt strebt.

Modell 2:
Da in unserem Beispiel immer die gesamte Räubergeneration ausstirbt und die nachfolgende Generation sukzessive gegen Null approximiert, sind die Räuber zum Aussterben verurteilt.