Grundzüge der Wirtschaftsinformatik

Räuber – Beute – Modell

Gruppe:	32	
Bearbeiter:	Havlicek Florian	9725824
	Nemecek Sascha	9825815
	Wohlfarter Wilhelm	9726176
Übung:	Grundzüge der Wirtschaftsinformatik	
Leiter:	Uni. Prof. H. Hanappi	
Abgabedatum:	12.01.1999	

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Unser Ansatz bestand darin, dass klassische Räuber-Beute-System (RBS) anders zu modellieren.
Die ursprünglichen Formeln,

$$\begin{aligned} X(t+\Delta t) &= X(t) + [a \cdot X(t) - b \cdot X(t) \cdot Y(t)]\Delta t \\ Y(t+\Delta t) &= Y(t) + [c \cdot X(t) \cdot Y(t) - d \cdot Y(t)]\Delta t \end{aligned} \quad \text{(klassisches RBS),}$$

werden so verändert, dass eine Kapazitätsschranke für die Beutepopulation eingefügt wird und anstatt des konstanten Parameters b (spezifische Verlustrate der Beute), Funktionen eingesetzt werden.

$$X(t+\Delta t) = X(t) + \left[a \cdot X(t) \cdot \overbrace{\left(1 - \frac{X(t)}{k}\right)}^{Kapazitätsgrenze} - b(X(t)) \cdot X(t) \cdot Y(t) \right] \cdot \Delta t$$

$$Y(t+\Delta t) = Y(t) + [c \cdot X(t) \cdot Y(t) - d \cdot Y(t)] \cdot \Delta t$$

Mit der Einführung der Kapazitätsschranke wird das System erst realistisch, da in der Natur keine unendlichen Ressourcen (Nahrungsmittel, Wohnraum, etc.) vorhanden sind.
Die Funktionen sollen bewirken, dass der Erfolg der Räuber verstärkt von der Anzahl der vorhandenen Beutetiere abhängt. Außerdem können dadurch für verschieden Beutetiere spezifische Verhaltensmuster simuliert werden.

Der allgemeine Fall stellt sich so dar, dass bei höherer Beutepopulation mehr Tiere gefressen werden. Dies kann durch folgende Funktion angenähert werden, die eine immer positive Steigung aufweist:

$$(a) \qquad b(x) = \frac{x}{(x+1)}$$

Die zweite von uns in Betracht gezogene Möglichkeit ist genau das Gegenteil. Je mehr Beutetiere vorhanden sind, desto weniger fallen den Räubern zum Opfer (Funktion stetig fallend). Dies kann am Beispiel der Erdhörnchen erklärt werden, die an den Ausgängen ihrer Wohnhöhlen Wachen aufstellen. Diese warnen ihre Artgenossen vor sich nähernden Feinden, sodass sich diese blitzschnell in die schützenden Erdlöcher zurückziehen können.

$$(b) \qquad b(x) = \frac{(1-e^{-x})}{x}$$

Der dritte Ansatz stellt eine Kombination der ersten beiden dar. Die Beutetiere haben die Möglichkeit sich in der Gruppe selbst zu verteidigen. Dies stellt sich in der Funktion durch den Wendepunkt dar, bei dem die Steigung vom Positiven ins Negative übergeht. Ein Beispiel dafür ist das Verteidigungsverhalten der Gnus, die sich in einem Kreis aufstellen und so Angriffe der Räuber mit ihren Hörnern abwehren können.

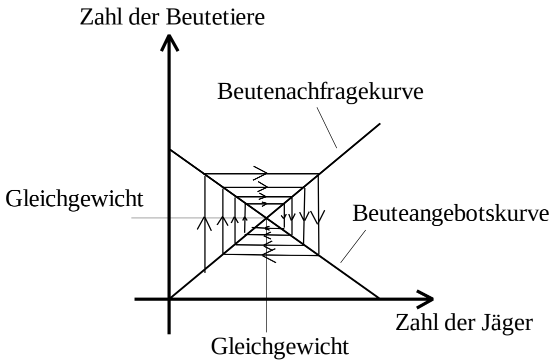
$$(c) \qquad b(x) = \frac{x}{\left(x^2 + 1\right)}$$

Unser Hauptaugenmerk liegt auf dem Vergleich der Fälle b und c.

2. Grundlagen

2.1. Prinzip des RBS

Das RBS ist ein reelles Beispiel aus der Natur für einen Regelkreis. Natürliche Regelkreise haben meist sehr lange Einschwingvorgänge. Minimale äußere Einflüsse (z.B. Mensch, Katastrophen, etc.) können das System gravierend aus seiner Bahn werfen. Dies kann zu langen Regenerationsphasen führen.



→ Spinnwebenmodel („Cob Web Model“)

<u>Erläuterung:</u> Nachfragekurve: wenig Jäger → wenig Beutebedarf
viele Jäger → hoher Beutebedarf
Angebotskurve: wenig Jäger → viel Beute
viele Jäger → wenig Beute

2.2. Klassisches Räuber-Beute-System (Lotka-Volterra)

Das klassische RBS ist kein reales und kann in der Natur nicht beobachtet werden, da es ideale Voraussetzungen annimmt. Daher strebt es den stabilen Punkt nicht an, sondern zirkuliert um ihn.
(Hinweis: Erläuterung des stabilen Punktes siehe *2.3 RBS mit saturiertem Wachstum*)

$$X(t+\Delta t)=X(t)+[a\cdot X(t)-b\cdot X(t)\cdot Y(t)]\Delta t$$
$$Y(t+\Delta t)=Y(t)+[c\cdot X(t)\cdot Y(t)-d\cdot Y(t)]\Delta t$$

X (t) = Beutepopulation
Y (t) = Räuberpopulation
Δt = Schrittweite (Zeit)

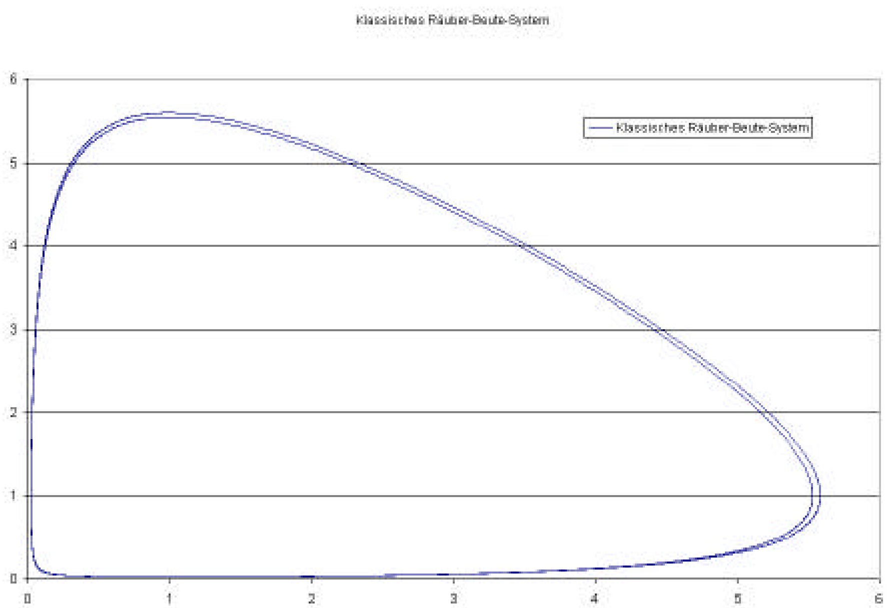
a= spezifische Wachstumsrate der Beute
b= spezifische Verlustrate der Beute
c= Beutegewinnrate der Räuber
d= Mortalität der Räuber

Stabile Punkte:

- $X=0;\ Y=0$
- $X=\frac{d}{c};\ Y=\frac{a}{b}$

Asymptotisches Verhalten:

- Für X = 0 sterben die Räuber exponentiell aus
- Für Y= 0 wächst die Beutepopulation exponentiell



Alle Trajektorien schwanken periodisch um den stabilen Punkt. Dauer und Amplitude der Periode hängen von den Startwerten ab. Im Zeitmittel sind die Räuberpopulation und die Beutepopulation konstant und entsprechen den Werten im stabilen Punkt. Durch die Ungenauigkeit der Berechnung ergibt sich die permanente Verkleinerung der Trajektorien.

2.3. Räuber-Beute-Modell mit saturiertem Wachstum (Kapazitätsschranke)

Wie bereits in der Einleitung erläutert, wird, um das RBS realer zu machen, eine Kapazitätsschranke der Beutepopulation eingefügt. Diese kann durch den Parameter k gesetzt werden und hat das Aussehen $\left(1-\frac{\cdot X(t)}{k}\right)$. Die modifizierten Funktionen sehen folgendermaßen aus:

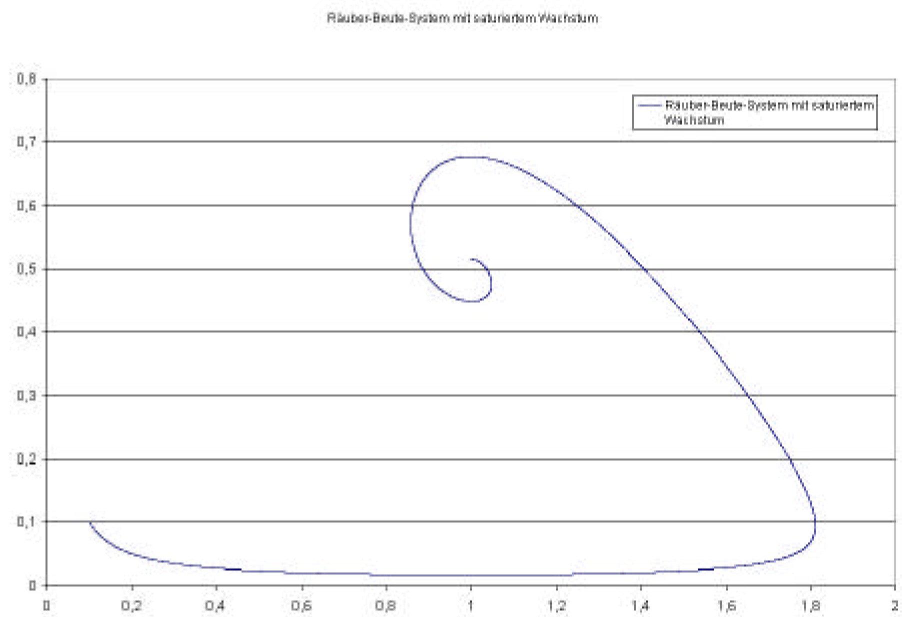
$$X(t+\Delta t)=X(t)+\left[a\cdot X(t)\cdot\left(1-\frac{\cdot X(t)}{k}\right)-b\cdot X(t)\cdot Y(t)\right]\Delta t$$

$$Y(t+\Delta t)=Y(t)+[c\cdot X(t)\cdot Y(t)-d\cdot Y(t)]\Delta t$$

k = Sättigungsgrenze für die Beute

Durch diese Kapazitätsschranke strebt das RBS in einen stabilen Punkt. Diesen kann man durch Nullsetzen der Änderungen in den beiden Gleichungen ausrechnen.
Man kommt dann auf folgende Ergebnisse:

1. $X=0;\ Y=0$
   Wenn keine Beute vorhanden ist, können auch keine Räuber überleben.
2. $X=k;\ Y=0$
   Wenn keine Räuber vorhanden sind, vermehren sich die Beutetiere bis zur Kapazitätsschranke.
3. $X=\frac{d}{c};\ Y=\frac{a}{b}\cdot\left(1-\frac{d}{c\cdot k}\right)$
   Dieser Punkt ist ein asymptotisch stabiler Punkt für alle Startwerte, vorausgesetzt k ist derart, daß 1-d/kc > 0. Ansonsten stirbt die Räuberpopulation aus.



3. Ausarbeitung der Modelle

Zur Vereinfachung der Modelle werden alle Parameter bis auf k (Kapazitätsgrenze k=2) auf 1 gesetzt.
Die Startwerte haben wir mit 0,1 für beide Populationen gleich gewählt.

X(0) = Y(0) = 0,1

Den Beobachtungszeitraum haben wir von 0 bis 20 Zeiteinheiten angenommen, da sich darüberhinaus keine nennenswerten Änderungen mehr ergeben. Wir durchlaufen diesen Zeitraum mit einem Δt von 0,002 Zeiteinheiten, was 10000 Schritten entspricht.

Zusammenfassung der Annahmen:

$$X(t+\Delta t) = X(t) + \left[a \cdot X(t) \cdot \left(1 - \frac{X(t)}{k}\right) - b(X(t)) \cdot X(t) \cdot Y(t) \right] \cdot \Delta t$$

$$Y(t+\Delta t) = Y(t) + \left[c \cdot X(t) \cdot Y(t) - d \cdot Y(t) \right] \cdot \Delta t$$

b(X(t))=

$$(a) \quad = \frac{x}{(x+1)}$$

$$(b) \quad = \frac{(1-e^{-x})}{x}$$

$$(c) \quad = \frac{x}{(x^2+1)}$$

Startwerte:

X(0) = Y(0) = 0,1

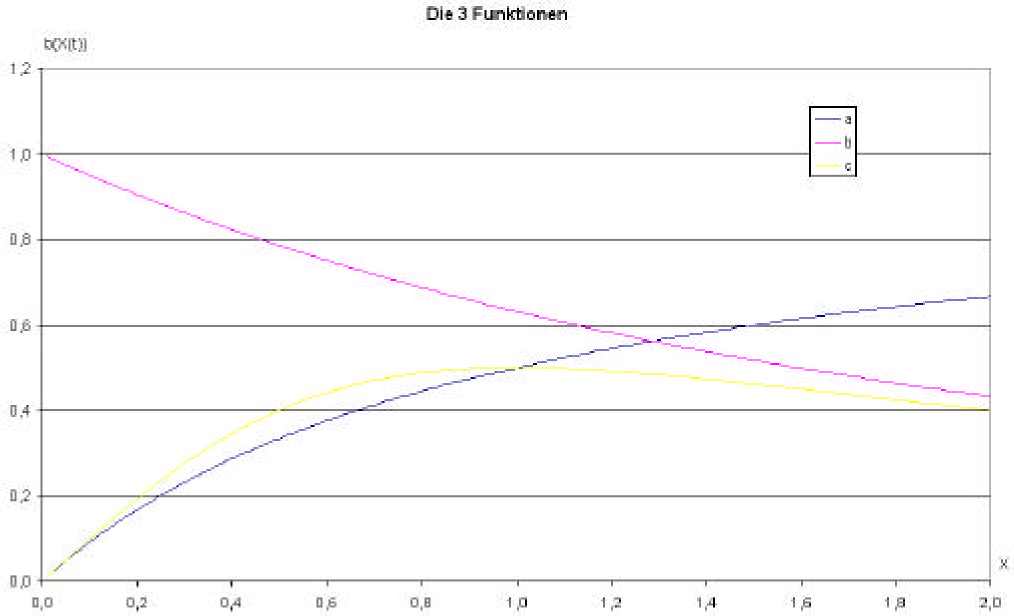
Schrittweite:

$\Delta t = 0{,}002$

Parameter:

a = b = c = d = 1
k = 2

Die drei Funktionen:



3.1. Fall A

Dies ist der allgemeine Fall.

$$X(t+\Delta t) = X(t) + \left[a \cdot X(t) \cdot \left(1 - \frac{X(t)}{k}\right) - \frac{x}{(x+1)} \cdot X(t) \cdot Y(t) \right] \cdot \Delta t$$

$$Y(t+\Delta t) = Y(t) + \left[c \cdot X(t) \cdot Y(t) - d \cdot Y(t) \right] \cdot \Delta t$$

$\Rightarrow$ *Stationäre Punkte*

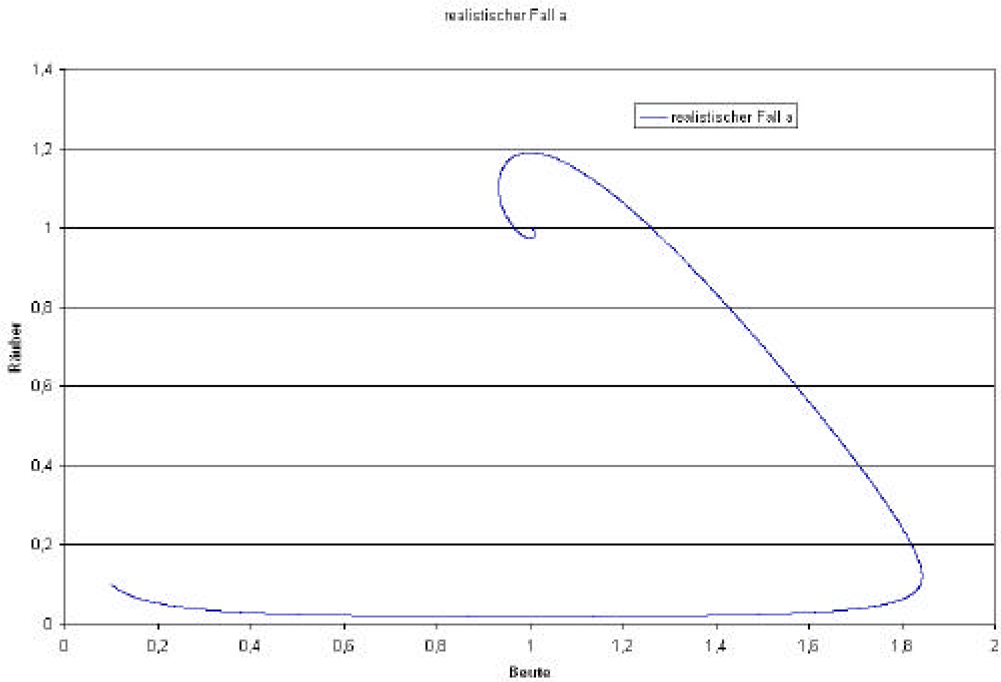
$1. Lsg.: \; x_1 = 0 \quad y_1 = 0$

$2. Lsg.: \; x_2 = k \quad y_2 = 0$

$$3. Lsg.: \; x = \frac{d}{c} \Rightarrow y = \frac{\left(\frac{d}{c} + 1\right) \cdot \left(1 - \frac{d}{k \cdot c}\right) a \cdot c}{d}$$

$\underline{\textit{Lösung für unseren Fall}: x = 1, \; y = 1}$

Diagramm:



3.2. Fall B

Hier handelt es sich um den zu Fall a inversen Fall. Die Funktion $\frac{(1-e^{-x})}{x}$ ist stetig fallend, zur besseren Veranschaulichung haben wir hier Erdhörnchen als Beispiel angenommen.

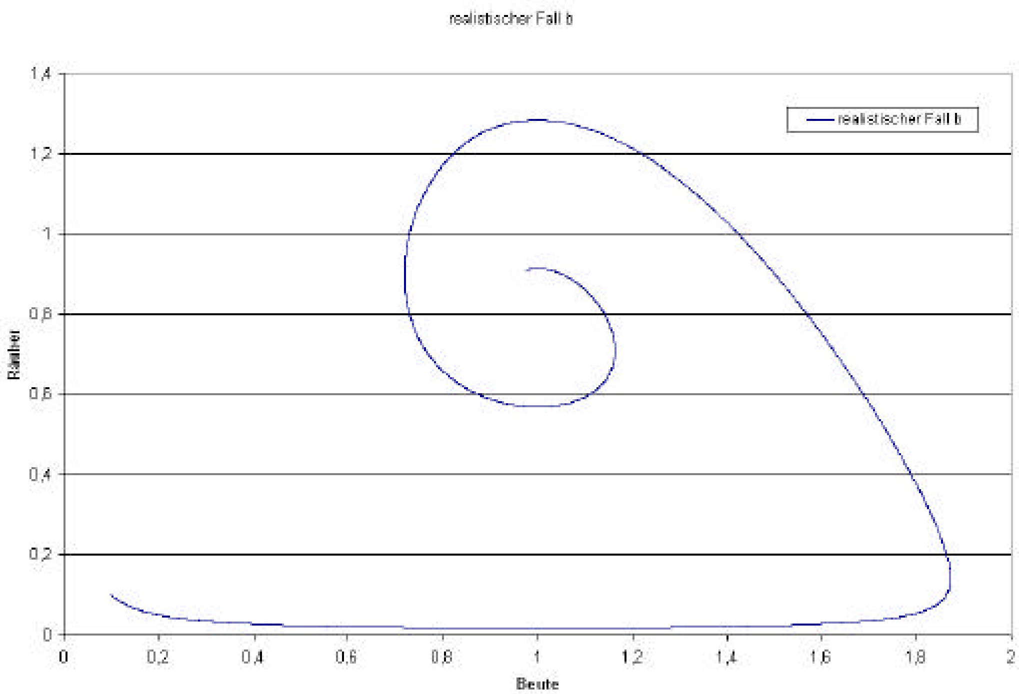
$$X(t+\Delta t) = X(t) + \left[a \cdot X(t) \cdot \left(1 - \frac{X(t)}{k}\right) - \frac{(1-e^{-x})}{x} \cdot X(t) \cdot Y(t) \right] \cdot \Delta t$$
$$Y(t+\Delta t) = Y(t) + [c \cdot X(t) \cdot Y(t) - d \cdot Y(t)] \cdot \Delta t$$

$\Rightarrow$ *Stationäre Punkte:*

1. *Lsg.:* $y_1 = 0 \rightarrow x_1 = 0$
2. *Lsg.:* $y_2 = 0 \rightarrow x_2 = k$
3. *Lsg.:* $x_3 = \frac{d}{c} \rightarrow y_3 = \frac{ad(kc-d)}{kc^2\left(1-e^{-\frac{d}{c}}\right)}$

Lösung für unseren Fall: x = 1, y ≈ 0,79

Diagramm:



3.3. Fall C

Zuletzt betrachten wir die Kombination der ersten beiden Fälle. Als Beispiel haben wir uns in diesem Fall die Gnus herangezogen, die sich ab einer gewissen Population wirksam gegen ihre Feinde verteidigen können.

$$X(t+\Delta t) = X(t) + \left[a \cdot X(t) \cdot \left(1 - \frac{X(t)}{k} \right) - \frac{x}{(x^2+1)} \cdot X(t) \cdot Y(t) \right] \cdot \Delta t$$

$$Y(t+\Delta t) = Y(t) + [c \cdot X(t) \cdot Y(t) - d \cdot Y(t)] \cdot \Delta t$$

$$\Rightarrow \ \textit{Stationären Punkte}$$

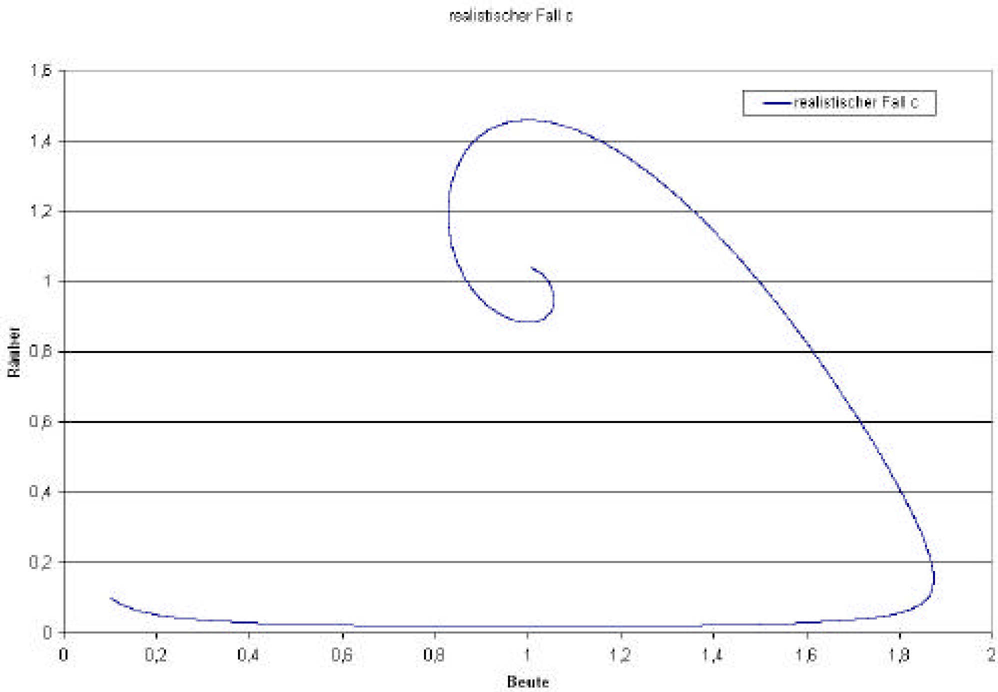
$$1.Lsg.: \ x_1 = 0 \quad y_1 = 0$$

$$2.Lsg.: \ x_2 = k \quad y_2 = 0$$

$$3.Lsg.: \ x = \frac{d}{c} \ \Rightarrow \ y = \frac{\left(\frac{d^2}{c^2} + 1 \right) \cdot \left(1 - \frac{d}{k \cdot c} \right) \cdot a \cdot c}{d}$$

$$\underline{\textit{Lösung für unseren Fall}: x = 1, \ y = 1}$$

Diagramm:



3.4. Vergleich

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, wollen wir nun die letzten beiden Fälle vergleichen.

Die Population der Gnus (Fall C) steigt bis knapp unter die Kapazitätsschranke an. Bis zu einem Punkt, an dem das Fortpflanzen aufgrund des Mangels an Nahrung schwieriger wird. Die Räuberpopulation steigt an, da alte und kranke Tiere leichte Beute sind. Mehr Gnus werden gefressen, und ihre Population nimmt ab. Die Räuberpopulation nimmt nun zu, bis das Wachstum der Beutetiere nicht mehr durch die Kapazitätsgrenze der Natur eingeschränkt ist. Die Gnus können sich nun gut verteidigen (das tun sie, indem sie sich im Kreis aufstellen, mit ihren Hörner nach außen und diese senken). Aufgrund dieser Taktik sind nun viele Räuber notwendig um Kreis zu sprengen, für alle Räuber, die für diese Aktion nötig sind, ist aber nicht genug Beute vorhanden. Daher nimmt die Räuberpopulation rapide und in großer Menge ab. Wie beim normalen Fall (A) kommt es nun auch hier zu einer spiralförmigen Annäherung an den stabilen Punkt.

Auch im Fall B steigt die Beutepopulation (in diesem Fall die Erdhörnchen) bis knapp unter die Kapazitätsschranke. Durch den gleichen Effekt wie im Fall C (das Fortpflanzen ist aufgrund der Kapazitätsschranke schwieriger), haben die Räuber leichtes Spiel und können sich leicht vermehren. Die Räuberpopulation steigt jedoch nicht so schnell wie in Fall C, da das Frühwarnsystem der Erdhörnchen „besser“ als das Selbstverteidigungssystem der Gnus wirkt, da das Frühwarnsystem relativ unabhängig von der Population ist. Die Annäherung an den stabilen Punkt dauert länger, da sich das System durch die Frühwarnung der Erdhörnchen träger verhält.