Name ______________________

Matr.Nr. ______________________

M-WInf/02-99/0017
2. Februar 1999

Gesamt ☐

Note ☐

1. Diplomprüfung Wirtschaftsinformatik
Prüfungsteil Mathematik

1. Sei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

   a) Man berechne die allgemeine Lösung des homogenen Systems $Ax = o$ und bestimme den Rang von A.

   b) Man berechne $\det A$; ist A invertierbar? (Begründung!)

   c) Angenommen, das inhomogene System $Ax = b$ ist für einen Vektor $b \in \mathbb{R}^3$ lösbar. Wie groß ist der Rang von $(A|b)$?

(6 Punkte)

2. Eine symmetrische 2×2-Matrix A habe den Eigenvektor $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ zum Eigenwert $\lambda_1 = -3$. Man finde einen Eigenvektor zum anderen Eigenwert λ_2 von A und bilde eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A. Kann die quadratische Form $x^t A x$ positiv sein für alle $x \neq o$? Warum (nicht) ?
(4 Punkte)

3. Sei

$$F(y) = \int_0^y \frac{3x^3 + 5x^2 + 2}{1 + x^4}\, e^{x^2 - \cos(x-1)}\, dx\,.$$

Man bestimme entweder $F(0)$ und $F'(1)$ oder aber $F(1)$ und $F'(0)$. (3 Punkte)

4. Man betrachte die Funktionen

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} xy^2 + x^3 \\ y^3 - x^3 + y \end{bmatrix} \quad \text{sowie} \quad g(u) = \begin{bmatrix} \sin u \\ 1 + u \end{bmatrix}.$$

Welche der vier Funktionen f^{-1}, g^{-1}, $f \circ g$ und $g \circ f$ sind sinnvoll? Man berechne $f(0,1)$ und $g(0)$ sowie gegebenenfalls die Ableitungsmatrizen $Df^{-1}(0,2)$, $Dg^{-1}(2,1)$, $D(f \circ g)(0)$ bzw. $D(g \circ f)(0,1)$.
(8 Punkte)

5. Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ habe an der Stelle $x_o = [0,1,2]^t$ den Wert $f(x_o) = 3$, den Gradienten $\nabla f(x_o) = [0,0,0]^t$ und die HESSE-Matrix

$$D^2 f(x_o) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ ? & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

   a) Man ergänze $D^2 f(x_o)$ und begründe dies.

   b) Man bilde die TAYLOR-Entwicklung von f an der Stelle x_o bis zur zweiten Ordnung und nähere damit den Wert $f(x)$ für $x = [\frac{1}{10}, \frac{9}{10}, \frac{19}{10}]^t$ an.

   c) Hat f bei x_o ein lokales Minimum oder Maximum ? (Begründung!)