

Ein Einfaches AIDS Modell



Martin Bauer: 9901395

Guntram Rümmele: 9902082

Das SIR - Modell

Die Modellierung von epidemischen Modellen hat schon lange Tradition. Man hat schon immer versucht Erklärungen für Krankheiten zu finden. Gerade bei Seuchen, die oft sogar heute noch als göttliche Strafe gesehen werden ist es wichtig Erklärungen zu suchen und zu finden.

Die Modellierung des Verlaufes neuer Krankheiten wie zum Beispiel Aids steckt allerdings noch in den Kinderschuhen. Man versucht zuerst einfache Modelle die das Grundverhalten einer Krankheit beschreiben, zu erstellen, die später verfeinert werden können.

Ein solch simples Modell ist z.B. das SIR - Modell. Bei diesem Modell geht man davon aus, das die beobachtete Bevölkerung(sgruppe) eine konstante Größe hat, d.h. das weder neu dazu kommende (Geburten) noch Abgänge (Todesfälle) beachtet werden. Die Bevölkerung wird in 3 Gruppen unterteilt :

1. Susceptibles (zu deutsch :Gefährdete)
2. Infective (Infizierte)
3. removed (Immune)

- ad. 1. Die Susceptibles sind der Teil der Bevölkerung, der Infiziert werden kann.
- ad. 2. Die Infizierten sind diejenigen die sich bereits mit der Krankheit angesteckt haben, und diese auch übertragen.
- ad. 3. Removed sind diejenigen, die die Krankheit überstanden haben und sich erholt haben und deshalb Immun sind. Zu dieser Klasse werden auch die an der Krankheit verstorben gezählt.

Typische Erkrankungen dieser Art sind die jährlichen Grippewellen.

Ob diese Krankheiten einen epidemischen Verlauf haben oder nicht hängt von der Reproduktionsrate ab. $R_0 < 1$ keine Epidemie, $R_0 > 1$ Epidemie

AIDS

Das HUMAN IMMUNODEFICIENCY VIRUS besser bekannt als HIV führt zum Ausbrechen der Krankheit AIDS (d.h. acquired immunodeficiency syndrome). Das HI-Virus verbreitet sich vor allem in Afrika mit enormer Geschwindigkeit. Man glaubt heute, daß AIDS die Krankheit des 20. & 21. Jahrhunderts ist. HIV positiv zu sein heißt noch nicht AIDS zu haben. Womit auch schon die Problematik in der Modellierung von Aids-Modellen beginnt.

Nachdem Antikörper gegen HIV im Körper entdeckt wurden, ist man Seropositiv. Erst nach einer von Fall zu Fall unterschiedlich langen Inkubationszeit bricht Aids voll aus. Man weiß heute, daß die Inkubationszeit im Bereich von Jahren bzw. Jahrzehnten liegt. In manchen Fällen bricht AIDS aber auch gar nicht aus. Da AIDS auch ein soziales Problem darstellt ist es auch schwierig Daten zu erheben.

Das Modell nach Andersson:

Anderson nimmt eine Bevölkerung an, bei der alle HIV positiv sind. Man unterteilt sie in die die nur seropositiv sind, bei denen AIDS jedoch noch nicht ausgebrochen ist in diesem Modell X, und diejenigen, die AIDS bereits entwickelt haben. Die Bevölkerung wird als konstant angenommen. Bei diesem Modell nimmt man an, das der menschliche Körper zusehends weniger Widerstandskräfte gegen HIV hat. Er wird vom Virus mürbe gemacht.

Die Ausbruchrate von AIDS (v) gibt an, wie viele Seropositive AIDS entwickeln. Daraus ergeben sich folgende Änderungsfunktionen

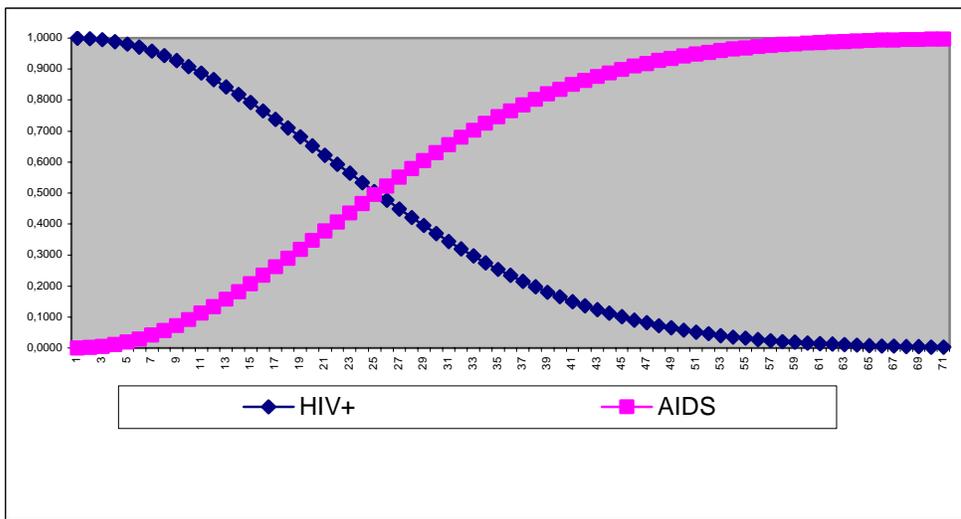
$$\frac{dx}{dt} = -v(t) * x$$

$$\frac{dy}{dt} = v(t) * x$$

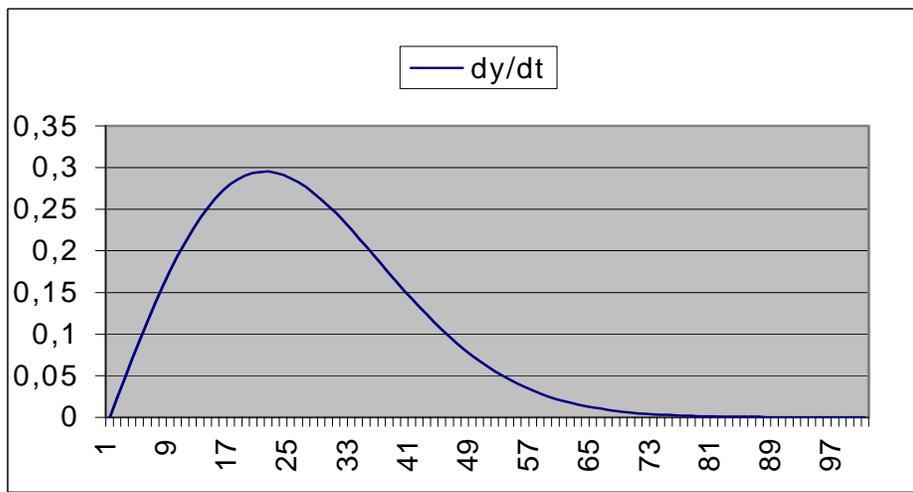
Da die Gesamtbevölkerung Konstant ist, ist $x + y = N$.
 v wird in abhängig von der Zeit (t) gesehen, d.h. $v(t) = a * t$

$$x(t) = e^{\left[-\frac{at^2}{2}\right]}$$

$$x(t) = 1 - e^{\left[-\frac{at^2}{2}\right]}$$



Modell nach Anderson



die Änderungsfunktion von Y (Infizierte)

Das epidemische Modell:

In diesem Fall betrachtet man die Entwicklung von AIDS in einer homosexuellen Population.

B ist die „Zuwanderungsrate“ in diese Gruppe

$N(t)$ steht für die Größe der gesamten Gruppe

$X(t)$ steht für die Zahl der Gefährdeten

$Y(t)$ ist die Anzahl der Infizierten

$A(t)$ die Anzahl der Patienten bei denen AIDS bereits ausgebrochen ist

$S(t)$ die Anzahl der Patienten bei denen AIDS noch nicht ausgebrochen ist, die sich aber bereits mit dem Virus infiziert haben.

μ ist die natürliche Sterberate

λ ist die Wahrscheinlichkeit sich mit einem willkürlich gewähltem Partner zu infizieren

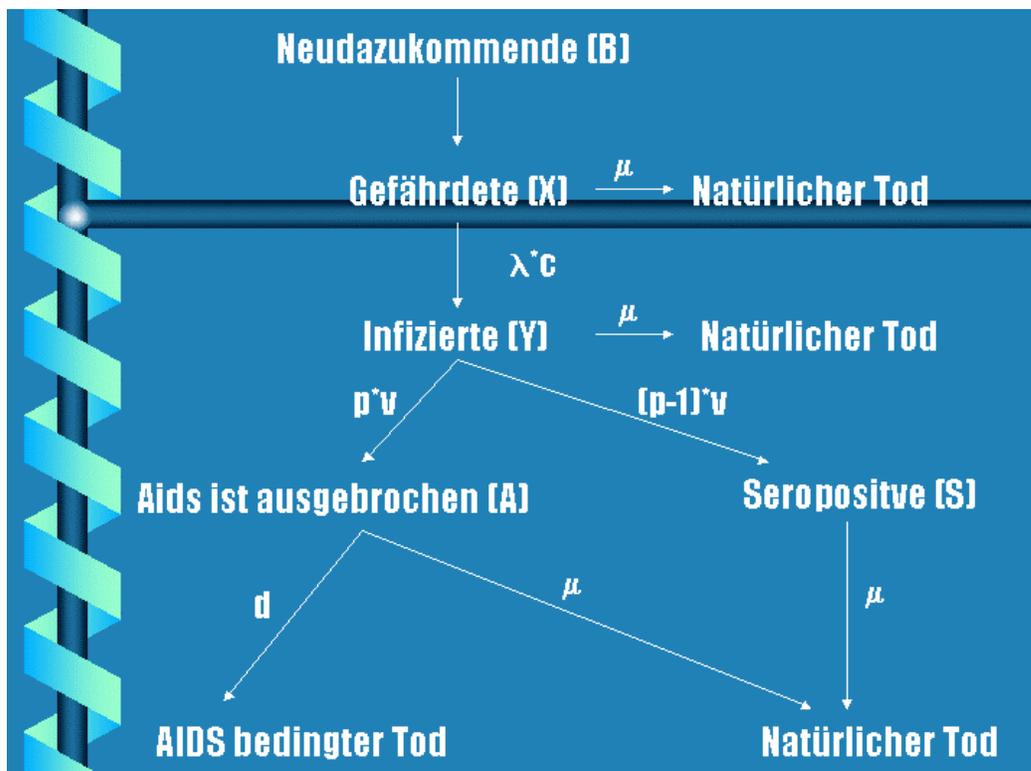
c ist die Anzahl der sexuellen Partner

p ist der Anteil der HIV Patienten die AIDS entwickeln

v die Konversionsrate von HIV zu AIDS

d ist die durch AIDS hervorgerufene Sterberate

Die Graphik ist eine bildliche Darstellung des Modells:



Wie man in der Graphik sieht ist ein natürlicher Tod in jedem Stadium der Krankheit möglich. Lamda berechnet sich aus der Übertragungswahrscheinlichkeit (β) mal der Zahl der Infizierten zur Zahl der Gesamtbevölkerung.

Daraus ergeben sich folgende Änderungsfunktionen:

$$X' = B - X * \mu - X * \lambda c \quad \lambda = \beta * Y / N$$

$$Y' = X * \lambda * c - Y * (v + \mu)$$

$$A' = Y * p * v - A * (d + \mu)$$

$$S' = Y * (1 - p) * v - S * \mu$$

$$X^* = \frac{(v + \mu)N^*}{c\beta}$$

$$Y^* = \frac{(d + \mu)(B - \mu N^*)}{pvd}$$

$$A^* = \frac{B - \mu N^*}{d}$$

$$S^* = \frac{(1 - p)(d + \mu)(B - \mu N^*)}{pd\mu}$$

$$N^* = \frac{B\beta[\mu(v + d + \mu) + vd(1 - p)]}{(v + \mu)[\beta(d + \mu) - pv]}$$

Ob es einen epidemischen Verlauf gibt oder nicht hängt von der Reproduktionsrate R_0 ab.

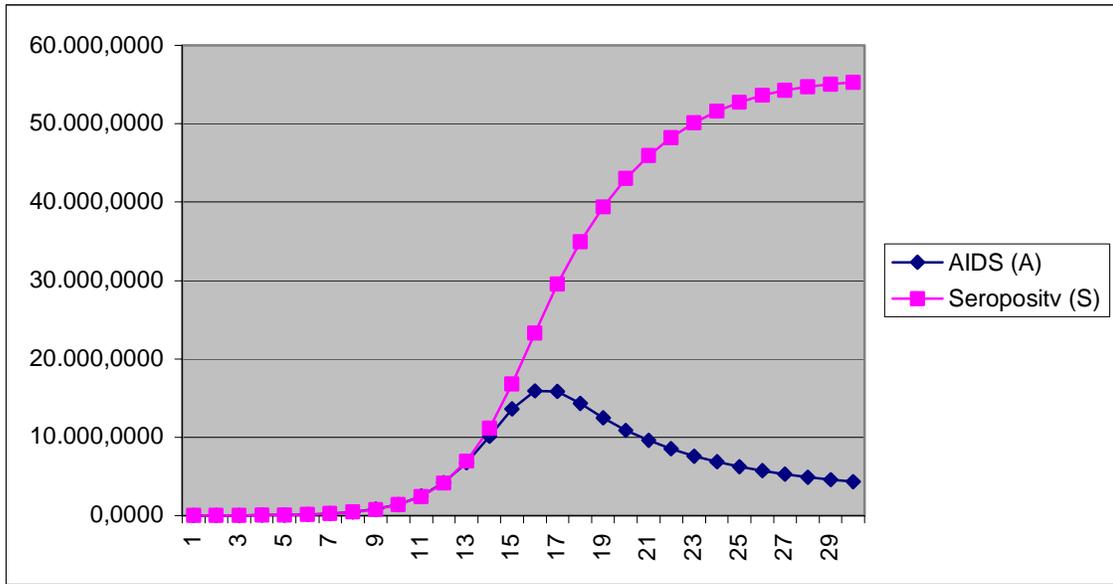
Ergibt sich aus einer Primär Infektion mehr als eine Sekundär Infektion dann ist $R_0 > 1$.

$R_0 = \beta * c / v$ Formel ergibt sich aus der Übertragungswahrscheinlich (β) Zahl der sexuellen Partner (c) zur durchschnittlichen Inkubationszeit ($1/v$)

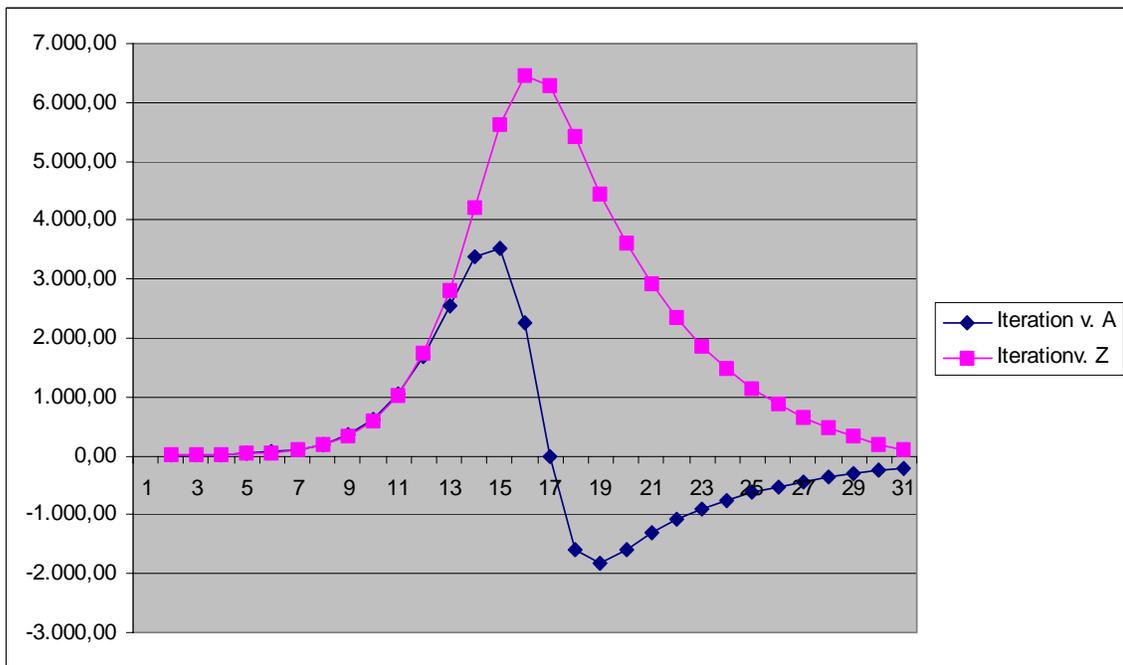
Dieses Modell für folgende Bedingungen:

X(0)=	99900
Y(0)=	100
A(0)=	0
S(0)=	0
N(0)=	100000

jährlich Neudazukommende (B) =	13.333,30
Jährliche Konversionsrate Seropositive zu AIDS (v) =	0,20
Natürliche Sterberate (mü) =	0,03
AIDS bedingte Sterberate pro Jahr (d) =	1,00
Wahrscheinlichkeit, daß AIDS ausbricht (p) =	0,70
Zahl der Sexuellen Partner c =	2,00
Reproduktionsrate $R_0 = \beta * c / v$ =	5,15
Übertragungsrate $\beta = p * v / c$ =	0,52



Das Verhältnis zwischen AIDS Patienten und Seropositiven



Die Änderungsfunktionen der Funktionen