1. Diplomprüfung für Volkswirte aus Mathematik, Statistik und Datenverarbeitung

Prüfungsteil Mathematik
3.2.1998

A) Prüfungsteil Lineare Algebra

1.) Man bestimme die Lösung des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 10 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4 &= 30 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 12 \end{aligned}$$

Kann man die rechte Seite derart ändern, daß keine Lösung des Gleichungssystems existiert ? (10)

2.) Man bestimme die Eigenwerte der folgenden Matrix A

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 4 & 14 \\ 4 & -1 & 10 \\ 14 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

Welche Definitheitseigenschaften besitzt die Matrix ? (10)

3.) Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

a) Man zeige, daß diese Vektoren eine Basis bilden. (3)

b) Bilden die Vektoren eine Orthogonalbasis ?(Begründung) (3)

c) Man bestimme zu der von den Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ gebildeten Matrix die inverse Matrix. (6)

4.) Man bestimme die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wie ist α zu wählen, damit die Matrix singulär ist ? (8)

B) Prüfungsteil Analysis

5.) Man bestimme den Wert $h(12)$, wenn $h(x) = (f \circ g)(x)$, mit
$f(x) = \sqrt{x^2 + 12}$ und $g(x) = \sqrt{\ln(x)}$. (4)

6.) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 24x^2 + 8.$$

Man bestimme die Bereiche, in denen die Funktion monoton steigend beziehungsweise monoton fallend ist sowie jene Bereiche wo sie konvex und konkav ist. (10)

7.) Man bestimme die ersten und zweiten partiellen Ableitungen der Funktion

$$f(x, y) = x^{\alpha} y^{\beta}, \qquad \alpha, \beta > 0$$

an der Stelle $(1, 1)$. (10)

8.) Man bestimme die stationären Punkte der Funktion

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{3}(x_1 - 3)^2 + x_2 x_3$$

unter der Nebenbedingung

$$x_1 + x_2 = 4.$$

(10)

9.) Man bestimme graphisch die Lösung des folgenden linearen Optimierungsproblems:

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 &\leq 8 \\ x_2 &\leq 5 \\ x_1 + x_2 &\leq 11 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

(6)