Diplomprüfung Mathematik für VolkswirtInnen

17.3.1999

1. $B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ bildet eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Man ermittle die Koordinaten von $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ bezüglich dieser Basis.

   (12 Punkte)

2. Berechnen Sie alle Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

   (14 Punkte)

3. Für welche Werte α und β ist der Vektor $(1, \alpha, \beta)^t$ sowohl orthogonal zu $(5, -1, 1)^t$ als auch zu $(-2, -1, -6)^t$?

   (14 Punkte)

4. Berechnen Sie

$$\int \log(x+4) \cdot \frac{1}{x+4} dx$$

   Anleitung: $\frac{1}{x+4} = (\log(x+4))'$.

   Substitution. (14 Punkte)

5. Man ermittle die Hesse-Matrix von $f(x, y) = 2^{xy}$.

   Anleitung: $a^b = e^{b \log a}$. (14 Punkte)

6. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + y = 0$$

   Hinweis: Verwenden Sie $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. (12 Punkte)

B) Prüfungsteil Analysis

5.a) Man bestimme die Umkehrfunktion von $f(x) = \sqrt{e^{x^2+2}}$, $x \geq 0$.
Ist die Umkehrfunktion auf ganz $\mathbb{R}$ definiert? (5)

5.b) Man bestimme die Elastizität von $f(x)$. (5)

6.) Man bestimme die Matrix der zweiten partiellen Ableitungen der Funktion

$$f(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan(x/y)). \qquad (10)$$

7.) Man zeige, daß die Funktion $f(x) = \sqrt{3x+1}$ konkav ist. (4)

8.) Gegeben sei die implizite Funktion

$$f(x_1, x_2, y) = x_1^a \cdot x_2^b \cdot y^2 - 5 = 0.$$

Man bestimme nach dem Hauptsatz über implizite Funktionen die partiellen Ableitungen nach y. Für welche Stellen (x_1, x_2, y) ist die Formel gültig ? (10)

9.) Man bestimme graphisch den zulässigen Bereich des folgende Ungleichungssystems:

$$2x + 5y \leq 10$$

$$2x + 3y \leq 12$$

$$x, y \geq 0$$

(6)